ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT พ.ย.57
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 1 (ตอนที่ 7/7)

โดยช่วงตั้งแต่ 7 ต.ค. - 20 พ.ย. 57 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้
วันอังคารดูวิชา GAT, วันพุธดูวิชา PAT1, วันพฤหัสดูวิชา PAT2

1. ให้ $P(x)$ แทนพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 ถ้าสมการ $P(x) = 6$ สามารถหาคำตอบที่แตกต่างกันได้ 6 คำตอบ แล้วค่าของ $P(5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1) 0　2) 5
3) 6　4) หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

2. ให้ $f(x) = \sum_{i=1}^{5} (x-i)^2$ แล้ว**ค่าต่ำสุด**ของ f ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1) 10　2) 8　3) 4　4) 2

3. กำหนดให้ f เป็นเส้นโค้งซึ่งผ่านจุดกำเนิดและมีอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับ x ที่จุด x ใดๆ เท่ากับ $6x - 2$ ถ้าเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) ขนานกับแกน x แล้ว a + b มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1) 0　2) 9　3) 15　4) 27

4. ให้ N เป็นจำนวนเต็ม 10 หลักที่**มากที่สุด** ที่มีสมบัติว่า 3 หลักใดๆ ที่ติดกันของ N ต้องหารด้วย 7 หรือ 13 ลงตัว ผลบวกเลขโดดในทุกหลักของ N มีค่าตรงกับข้อใด
1) 70　2) 71　3) 72　4) 73

5. ในการสอบวิชาภาษาไทยของนักเรียนชั้น ม.6 สายวิทย์ของโรงเรียนแห่งหนึ่งซึ่งมีเพียง 20 คน พบว่า คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 60 และความแปรปรวนเท่ากับ 180 ต่อมาภายหลัง พบว่ามีการรวมคะแนนของนักเรียนผิดพลาดไป 1 คน คือ 50 คะแนน ที่ถูกต้อง คือ 80 คะแนน ดังนั้น ความแปรปรวนของคะแนนที่ถูกต้องเท่ากับเท่าใด
1) 190.25　2) 192.75　3) 195.50　4) 197.75

6. กำหนด $\sin\theta + \cos\theta = a$, $\sin\theta - \cos\theta = b$ และ $\sin 2\theta = c$ แล้ว $\sin^6\theta - \cos^6\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1) abc^2　2) $ab\left(\frac{c^2}{4} - 1\right)$　3) $ab\left(1 + \frac{c^2}{4}\right)$　4) $ab\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)$

7. กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และผ่านจุด (2, 3) ถ้าเส้นตรง L สัมผัสวงกลมที่จุด x = −1 ในจตุภาคที่ 2 แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง L
1) $(-7, -\sqrt{3})$　2) $(-7, \sqrt{3})$　3) $\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$　4) $(-19, \sqrt{3})$

เฉลย

1. เฉลย 3) 6

พิจารณาพหุนาม $P(x) - 6$ ซึ่งจะมีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4
ถ้า $P(x) \neq 6$ แล้วสมการ $P(x) - 6 = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 4 คำตอบ แต่เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $P(x) - 6 = 0$ สามารถหาคำตอบที่แตกต่างกันได้ 6 คำตอบ
ดังนั้น พหุนาม $P(x)$ เป็นพหุนามคงตัว นั่นคือ $P(x) = 6$ (ทุกค่า $x \in R$ เป็นคำตอบหมด)
เพราะฉะนั้น $P(5) = 6$

2. เฉลย 1) 10

$\because \sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2$ มีค่า**น้อยสุด**เมื่อ $a = \bar{x}$

ดังนั้น $f(x) = \sum_{i=1}^{5} (x-i)^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-5)^2$
$= (1-x)^2 + (2-x)^2 + \ldots + (5-x)^2$

$f(x)$ มีค่า**น้อยที่สุด** เมื่อ $x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

$\therefore$ **ค่าต่ำสุด**ของ f(x) คือ $f(3) = (3-1)^2 + (3-2)^2 + \ldots + (3-5)^2$
$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$

3. เฉลย 1) 0

จากโจทย์ จะได้ว่า $f'(x) = 6x - 2$ ทุก $x \in R$
ดังนั้น $f(x) = \int (6x-2)\,dx$
$= 3x^2 - 2x + c$

แต่ f ผ่านจุดกำเนิด (0, 0) ดังนั้น f(0) = 0
นั่นคือ $3(0)^2 - 2(0) + c = 0$
$\therefore$ c = 0 ทำให้ได้ว่า $f(x) = 3x^2 - 2x$
เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) ขนานแกน x ดังนั้น $f'(a) = 6a - 2 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{3}$

ที่จุด (a, b) ; $b = f(a)$
$= f\left(\frac{1}{3}\right)$
$= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)$
$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$\therefore a + b = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

4. เฉลย 4) 73

เริ่มจากหา 3 หลักแรกทางซ้ายของ N เนื่องจาก N ต้องมีค่า**มากที่สุด** ทำให้ 3 หลักซ้ายต้องมีค่า**มากที่สุด** และหารด้วย 7 หรือ 13 ลงตัว ซึ่งก็คือ 994 (หารด้วย 7 ลงตัว)

$\because$ หลักต่อไปจะเป็น 94x ซึ่งต้องหารด้วย 7 หรือ 13 ลงตัว และ x ต้องมีค่า**มากที่สุด** จึงได้ x เป็น 9 ($\because$ 949 หารด้วย 13 ลงตัว)

ด้วยวิธีการนี้จะได้ N = 9949756798

[994 → 7 หารลงตัว, 949 → 13 หารลงตัว, 497 → 7 หารลงตัว, 975 → 13 หารลงตัว, 756 → 7 หารลงตัว, 567 → 7 หารลงตัว, 679 → 7 หารลงตัว, 798 → 7 หารลงตัว]

ดังนั้น ผลบวกเลขโดดในทุกหลักของ N จึงเป็น 9 + 9 + 4 + 9 + 7 + 5 + 6 + 7 + 9 + 8 = 73

5. เฉลย 2) 192.75

ขั้นที่ 1 หาคะแนนรวมและค่าเฉลี่ยที่ถูกต้อง

Σx (ผิด) $= 20 \times 60 = 1200$
Σx (ถูก) $= 1200 + (80 - 50) = 1230$
μ (ถูกต้อง) $= \frac{1230}{20} = 61.5$

ขั้นที่ 2 หา Σx^2 และความแปรปรวนที่ถูกต้อง

σ^2 (ผิด) $= \frac{1}{N}[\Sigma x^2 \text{ (ผิด)} - N\mu^2 \text{ (ผิด)}]$
$180 = \frac{1}{20}[\Sigma x^2 \text{ (ผิด)} - 20 \cdot 60^2]$
Σx^2 (ผิด) $= 20 \cdot 180 + 20 \cdot 60^2 = 75600$
Σx^2 (ถูกต้อง) $= 75600 - 50^2 + 80^2 = 79500$
σ^2 (ถูกต้อง) $= \frac{1}{20}[79500 - 20 \cdot 61.5^2] = 192.75$

6. เฉลย 4) $ab\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)$

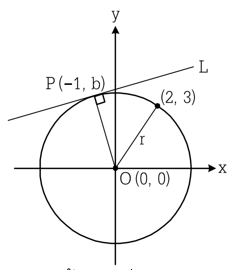
$\sin^6\theta - \cos^6\theta = (\sin^3\theta)^2 - (\cos^3\theta)^2$
$= (\sin^3\theta - \cos^3\theta)(\sin^3\theta + \cos^3\theta)$
$= (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$
$(\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$
$= b(1 + \sin\theta\cos\theta)(a)(1 - \sin\theta\cos\theta)$
$= ab(1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)$

$\because \sin 2\theta = c$
$2\sin\theta\cos\theta = c$
$\sin\theta\cos\theta = \frac{c}{2}$

$= ab\left(1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$
$= ab\left(1 - \frac{c^2}{4}\right)$

7. เฉลย 2) $(-7, \sqrt{3})$

พิจารณารูป



ดังนั้น $r = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$
จะได้สมการวงกลม คือ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{13})^2$
$x^2 + y^2 = 13$
เนื่องจาก L สัมผัสวงกลมที่ x = −1 ดังนั้น หาจุดสัมผัสโดยแทน x = −1 ในสมการวงกลม
$(-1)^2 + y^2 = 13$
$y^2 = 12$
จะได้ $y = 2\sqrt{3}$ เพราะจุดสัมผัสอยู่ในจตุภาคที่ 2
ดังนั้น จุดที่เส้นตรง L สัมผัสวงกลม คือ จุด $P(-1, 2\sqrt{3})$

พิจารณา $m_{OP} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{-1 - 0} = -2\sqrt{3}$

เนื่องจาก $\overline{OP} \perp$ เส้นตรง L ดังนั้น $m_L = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

หาสมการเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด $(-1, 2\sqrt{3})$ และมีความชัน $\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 2\sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x + 1)$
$2\sqrt{3}y - 12 = x + 1$
$x - 2\sqrt{3}y + 13 = 0$

ทดสอบค่าเพื่อหาคู่ลำดับที่สอดคล้องกับสมการ L ดังนี้
ที่จุด $(-7, -\sqrt{3})$ จะได้ $x - 2\sqrt{3}y + 13 = -7 - 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 13 = 12$
$(-7, \sqrt{3})$ จะได้ $x - 2\sqrt{3}y + 13 = -7 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) + 13 = 0$
$\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ จะได้ $x - 2\sqrt{3}y + 13 = -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) + 13 = \frac{11}{2}$
$(-19, \sqrt{3})$ จะได้ $x - 2\sqrt{3}y + 13 = -19 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) + 13 = -12$
ดังนั้น จุด $(-7, \sqrt{3})$ อยู่บนเส้นตรง L

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com